IX Konferencja Modelowanie Matematyczne w Fizyce i Technice

# Funkcje o wahaniu skończonym i ich własności

**Oliwia Fertacz, Agata Paluszewska**

*Instytut Matematyki Politechniki Częstochowskiej*

1

## Definicja i własności funkcji o wahaniu skończonym

Niech $f$ będzie funkcją określoną na przedziale $[a,b]$. Podzielmy przedział $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ oraz wyznaczmy liczbę

$$W_a^b(f) = \sup_P \sum_{i=1}^{n} | f(x_i) - f(x_{i-1}) | \qquad (1)$$

gdzie supremum jest wzięte po wszystkich podziałach skończonych P przedziału $[a,b]$. Liczbę $W_a^b(f)$ nazywamy *wahaniem funkcji* $f$ na przedziale $[a,b]$ lub wariancją funkcji na tym przedziale.

Jeżeli $W_a^b(f) < \infty$, to funkcja $f$ nazywa się *funkcją o wahaniu skończonym.*

1. Dla dowolnej funkcji $f:[a,b] \to R$ mamy $| f(b) - f(a) | \le W_a^b(f)$ (2)

   <u>Przykład</u>

   Weźmy funkcję $f(x) = \cos x$ na przedziale $[0, \frac{3\pi}{2}]$. Lewa strona nierówności (2) przyjmuje wartość

   $$| \cos(\frac{3\pi}{2}) - \cos(0) | = 1$$

   Natomiast wariancja tej funkcji na podanym przedziale wynosi 3.

   Zatem warunek (2) jest spełniony

2. Suma, różnica oraz iloczyn funkcji o wahaniu skończonym jest funkcją o wahaniu skończonym.

3. Jeżeli $f(x)$ i $g(x)$ są funkcjami o wahaniu ograniczonym i dodatkowo nałożony jest warunek $| g(x) | > \sigma \ge 0$, to iloraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ jest także funkcją o wahaniu ograniczonym.

4. Niech $f:[a,b] \to$ R jest funkcją o wahaniu ograniczonym i niech $\lambda \in$ R. Wówczas funkcja $\lambda f$ jest również funkcją o wahaniu ograniczonym. Ponadto

   $$W_a^b(\lambda f) = | \lambda | W_a^b(f) \qquad (3)$$

5. Jeśli funkcja $f(x)$ ma wahanie skończone na przedziale $[a,b]$, to dla $a \le x \le b$ wahanie

   $$g(x) = W_a^x(f(t)) \qquad (4)$$

   jest funkcją ograniczoną i rosnącą zmiennej $x$.

## Kryteria istnienia funkcji o wahaniu skończonym

Aby funkcja $f(x)$ miała na przedziale $[a,b]$ wahanie skończone, potrzeba i wystarcza, aby mogła być przedstawiona jako różnica dwóch funkcji rosnących i ograniczonych

$$f(x) := g(x) - h(x) \qquad (5)$$

Jeśli funkcję $f$ na przedziale $[a,b]$ skończonym bądź nieskończonym można przedstawić jako całkę o zmiennej górnej granicy całkowania

$$f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt \qquad (6)$$

gdzie funkcja $\varphi(t)$ jest bezwzględnie całkowalna na $[a,b]$, wtedy funkcja $f(x)$ ma wahanie skończone na przedziale $[a,b]$ oraz

$$W_a^b(f) \le \int_a^b | \varphi(t) | dt \qquad (7)$$

Przykład

Załóżmy, że funkcja $f$ ma wahanie skończone na przedziale $[a,b]$, a funkcja $g$ przedstawiona jest w postaci

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt & dla \;\; x \in (a,b] \\ 0 & dla \;\; x = a \end{cases}$$

Z twierdzenia o rozkładzie kanonicznym Jordana wiemy, że

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$$

Funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są monotonicznie rosnące i są całkowalne w sensie Riemanna na przedziale $[a,b]$. Zatem

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b \psi(x)dx$$

Korzystając z tego, że funkcja $\varphi$ jest rosnąca na $[a,b]$ pokażemy, że na tym przedziale rosnąca jest także funkcja $g$, która zadana jest wzorem

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-a}\int_a^x \varphi(t)dt & dla \;\; x \in (a,b] \\ 0 & dla \;\; x = a \end{cases}$$

Jeżeli $a < x < y \le b$, to

$$g(y) - g(x) = \frac{1}{y-a}\int_a^y \varphi(t)dt - \frac{1}{x-a}\int_a^x \varphi(t)dt = \frac{x-y}{(x-a)(y-a)}\int_a^x \varphi(t)dt + \frac{1}{y-a}\int_x^y \varphi(x)dt \ge$$

$$\ge \frac{x-y}{(x-a)(y-a)}\int_a^x \varphi(t)dt + \frac{1}{y-a}\int_x^y \varphi(x)dt = \frac{x-y}{(x-a)(y-a)}\int_a^x (\varphi(x) - \varphi(t))dt \ge 0$$

Zatem funkcja $g$ jest rosnąca na przedziale $[a,b]$ i ma wahanie skończone na tym przedziale, co należało pokazać.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Organizacja IX Konferencji Modelowanie Matematyczne w Fizyce i Technice (MMFT 2017)

- zadanie finansowane w ramach umowy 829/P-DUN/2017 ze środków Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego przeznaczonych na działalność upowszechniającą naukę.