IX Konferencja Modelowanie Matematyczne w Fizyce i Technice

Funkcje o wahaniu skończonym i ich własności

2

Oliwia Fertacz, Agata Paluszewska

Instytut Matematyki Politechniki Częstochowskiej

Związek funkcji o wahaniu skończonym z innymi klasami funkcji

Każda funkcja f o wahaniu skończonym na przedziale [a,b] jest sumą funkcji ciągłej g o wahaniu skończonym i funkcji skoków $s(x)=\sum u_v(x)$, gdzie

$$u_v(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla } x<x_v \\ f(x_v)-f(x_v-0) & \text{dla } x=x_v \\ f(x_v+0)-f(x_v-0) & \text{dla } x>x_v \end{cases} \qquad (8)$$

a $\{x_v\}$ jest ciągiem wszystkich punktów nieciągłości funkcji f.

Nie każda funkcja ciągła musi mieć wahanie ograniczone. Potwierdzając tę tezę, pokażmy następujący przykład:

Niech funkcja $f:[0,1]\to R$ będzie określona wzorem:

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x} & \text{dla } x\neq 0 \\ 0 & \text{dla } x=0 \end{cases}$$

Weźmy punkty: $0<\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n-1}<\ldots<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1$. Dla punktów z przedziału [0,1] sprawdamy z definicji

$$v=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n}|x_i\cos(\frac{\pi}{2x_i})-x_{i-1}\cos(\frac{\pi}{2x_{i-1}})|=$$

$$=|\frac{1}{2n}\cos(\pi n)-0|+|\frac{1}{2n-1}\cos(\pi n-\frac{\pi}{2})-\frac{1}{2n}\cos(\pi n)|+\ldots+$$

$$+|\frac{1}{2}\cos(\pi)-\frac{1}{3}\cos(\frac{3\pi}{2})|+|\cos(\frac{\pi}{2})-\frac{1}{2}\cos(\pi)|$$

Dla $n=1$ $W_0^1(f)=1$, dla $n=2$ $W_0^1(f)=1+\frac{1}{2}$, dla $n=3$ $W_0^1(f)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

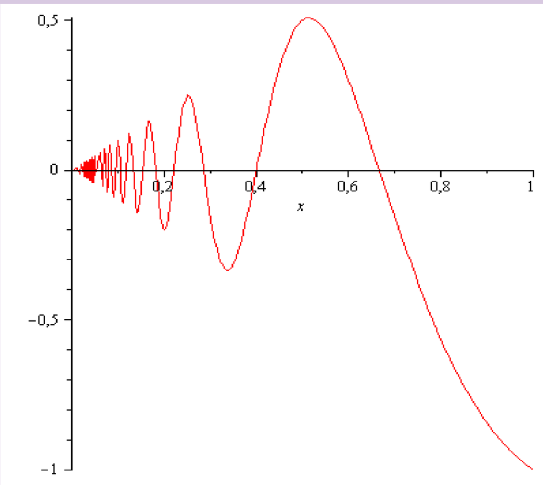
Dla coraz większego n suma v będzie się zwiększać, dlatego

$$W_0^1(f)=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$$

Wahanie jest szeregiem harmonicznym, który jest rozbieżny, zatem

$$W_a^b(f)=+\infty$$

Wahanie nieskończone tej funkcji na przedziale [0,1] można zilustrować na wykresie



Rys. 1 Funkcja o wahaniu nieograniczonym

Na podstawie wykresu widać, że funkcja f na danym przedziale waha się nieskończenie wiele razy, gdy dąży do zera.

Funkcja f na przedziale $[a,b]$ jest funkcją o wahaniu ograniczonym, jeżeli w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału ma ograniczoną pochodną

$$|f'(x)|\leq L, \quad \text{gdzie } L=const \qquad (9)$$

Wykażemy, że nie każdka funkcja różniczkowalna na danym przedziale ma na nim wahanie ograniczone.

Niech dana będzie funkcja $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{\pi}{x^2} & \text{dla } x\in(0,1] \\ 0 & \text{dla } x=0 \end{cases}$

Jest ona różniczkowalna na przedziale [0,1], ponieważ jej pochodna

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\cos\frac{\pi}{x^2}+\frac{2\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x^2} & \text{dla } x\in(0,1] \\ 0 & \text{dla } x=0 \end{cases}$$

istnieje w każdym punkcie tego przedziału. Aby pokazać, że nie ma ona wahania ograniczonego, rozważmy podział przedziału [0,1].

$$0<\sqrt{\frac{1}{n}}<\sqrt{\frac{1}{n-\frac{1}{2}}}<\sqrt{\frac{1}{n-1}}<\ldots<\sqrt{\frac{1}{2}}<\sqrt{\frac{1}{2-\frac{1}{2}}}<1$$

Można zauważyć, że w każdym z przedziałów $[\sqrt{\frac{1}{i}},\sqrt{\frac{1}{i-\frac{1}{2}}}]$ $i=1,2,\ldots,n$

oraz $[\sqrt{\frac{1}{i+\frac{1}{2}}},\sqrt{\frac{1}{i}}]$ $i=1,2,\ldots,n-1$ funkcja f jest motoniczna, zatem

$$W_0^1(f)=1+\sum_{i=2}^{n}\frac{2}{i}\xrightarrow{n\to\infty}\infty$$

Zatem wahanie funkcji f jest nieskończone, co należało pokazać.

Mówimy, że funkcja $f:[a,b]\to R$ spełnia warunek Höldera na $[a,b]$, jeżeli istnieją stałe M i α, że

$$|f(x)-f(x')|\leq M|x-x'|^{\alpha} \qquad \text{dla } x,x'\in[a,b] \qquad (10)$$

Podajmy przykład funkcji o wahaniu skończonym, która nie spełnia warunku Höldera:

Niech dana będzie funkcja

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\ln(\frac{1}{x})} & \text{dla } x\in(0,\frac{1}{2}] \\ 0 & \text{dla } x=0 \end{cases}$$

Weźmy $\alpha>0$, wtedy

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x^{\alpha}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-\alpha}}{-\ln x}=+\infty$$

więc funkcja f nie spełnia warunku Höldera dla każdego dodatniego α.

Jednak wahanie tej funkcji jest skończone i wynosi

$$W_0^{\frac{1}{2}}(f)=|f(\frac{1}{2})-f(0)|=\frac{1}{\ln 2}\approx 1{,}443$$

ponieważ funkcja na przedziale $[0,\frac{1}{2}]$ jest rosnąca. Zatem możemy zauważyć, że funkcja o wahaniu skończonym nie musi spełniać warunku Höldera.

Prezentacja powstała na podstawie pracy dyplomowej Oliwii Fertacz pt. "Funkcje o wahaniu skończonym i ich własności"

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Organizacja IX Konferencji Modelowanie Matematyczne w Fizyce i Technice (MMFT 2017) - zadanie finansowane w ramach umowy 829/P-DUN/2017 ze środków Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego przeznaczonych na działalność upowszechniającą naukę.